

# Games in the View of Mathematics



**Opening Training School for the UTOPIAE  
University of Strathclyde, Glasgow**

**23/11/2017**

**Jörg Bewersdorff**

**<http://www.bewersdorff-online.de>**



# Curriculum vitae



- 1975-1982 Study of mathematics at the University of Bonn
- 1985 Ph.D. (Bonn): Number theory, algebraic topology
- 1985- R&D of AWP's and other coin op machines
- 1998- General manager of subsidiaries of Gauselmann AG
- 1998 Textbooks on
  - mathematics of games (US: 2005),
  - Algebra / Galois theory (US: 2006, Korea: 2015),
  - Statistics,
  - JavaScript and object-orientated programming
- 2002
- 2011
- 2014

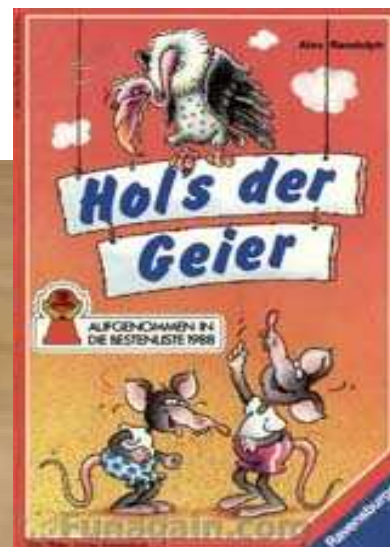
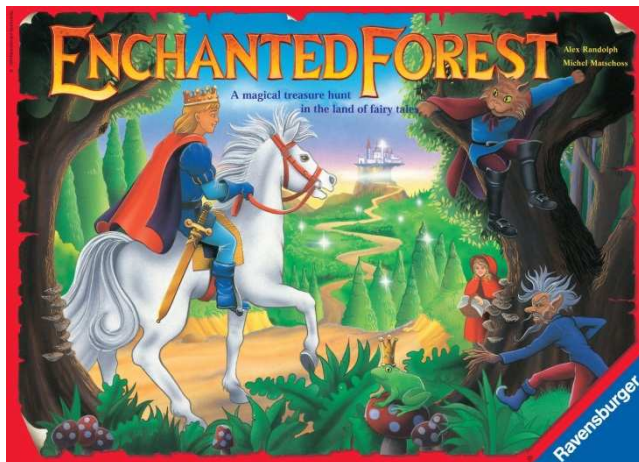




# Board games ...

*A feeling of adventure is an element of games. We compete against the uncertainty of fate, and experience how we grab hold of it through our own efforts.*

*Alex Randolph, game author*





# Uncertainty

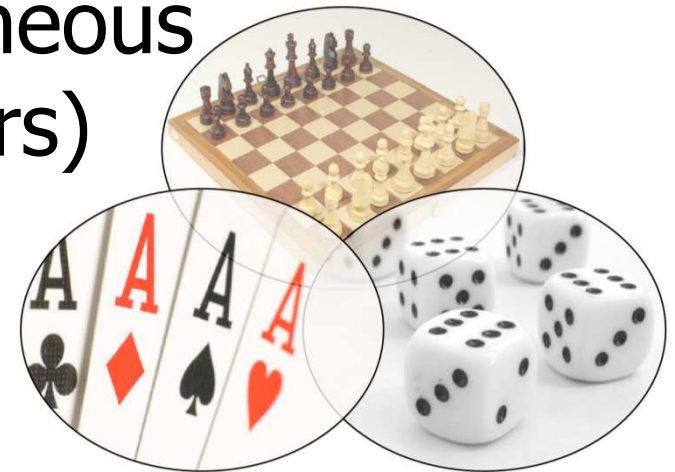


- motivates us to play a game. Uncertainty brings
  - **entertainment** und **excitement** as a result of variety and
  - **winning hope** of all players.
- There are **three reasons** for the uncertainty ...



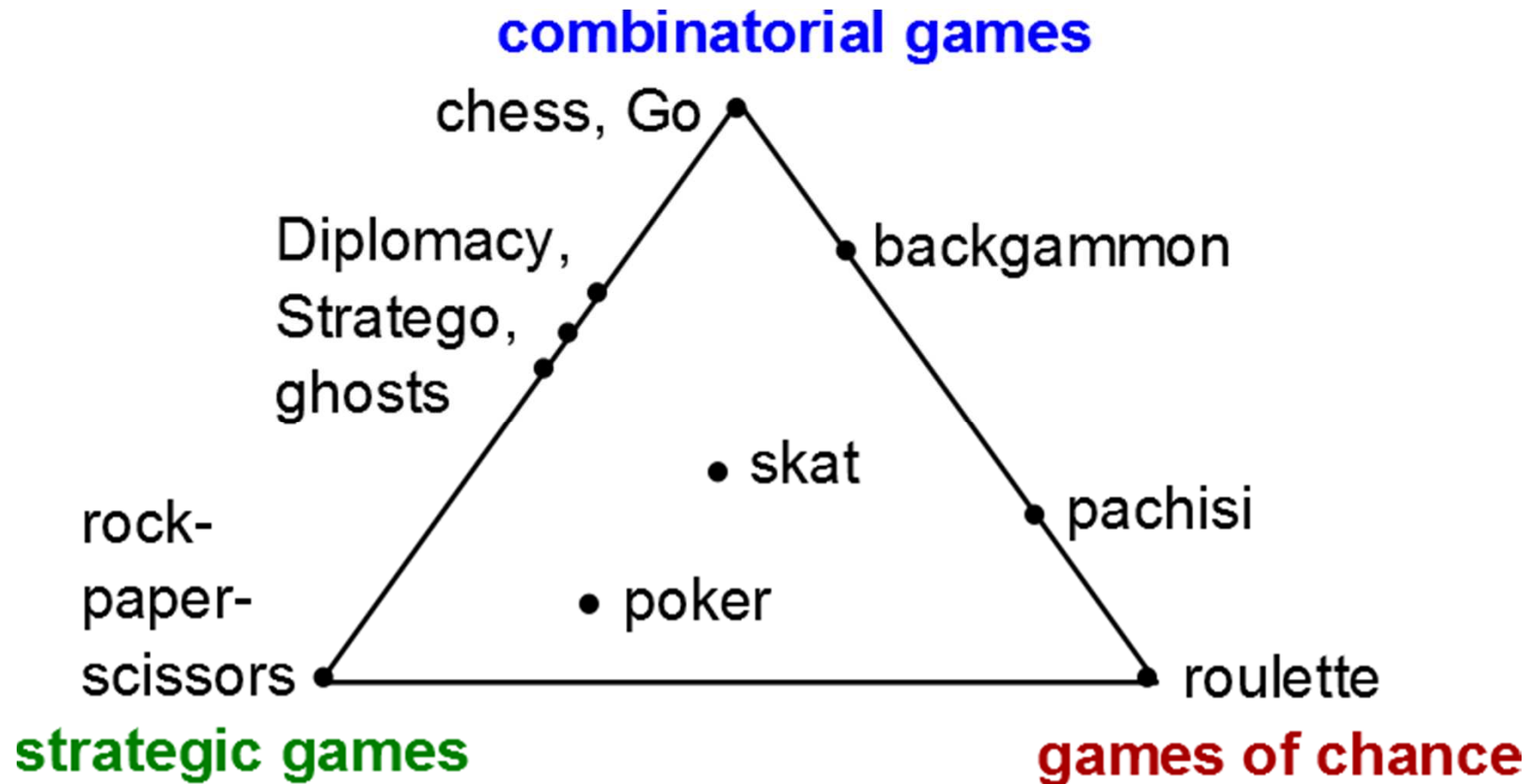
# Uncertainty: reasons

- **randomness** (shuffling of cards, dice)
- **many combinations** of move options in sequences of moves (chess: even a two-mover can be very difficult)
- **hidden information** (every player knows only his own cards, simultaneous moves in Rock-paper-scissors)





# Examples of game classes





# Mathematics in games: What for?



- Implementation of computer programs which are playing (and hopefully winning!) games
- Which level of quality can be reached?
- Legal questions: Where is limit between games of chances and games of skill?
- Create fair and effective “games”, for example rules of an auction to sell licenses for using frequencies (TV, mobile network)



# Unabhängiger Finanzsenat Wien ...



UNABHÄNGIGER  
FINANZSENAT

Außenstelle Wien  
Senat 21

GZ. RV/1662-W/06

## Berufungsentscheidung

Der unabhängige Finanzsenat hat über die Berufungen des Dr. Wolfgang Leitner als Masseverwalter der Bw., 1010 Wien, Kohlmarkt 14, gegen den Bescheid gemäß § 201 BAO des Finanzamtes für Gebühren und Verkehrsteuern Wien vom 19. Mai 1994 betreffend Rechtsgebühren gemäß § 33 TP 17 GebG und Erhöhung für den Zeitraum 1. Februar 1994 bis 28. Februar 1994 entschieden:

1.) Der Berufung wird teilweise Folge gegeben und der angefochtene Bescheid abgeändert:

Die Rechtsgebü  
Euro 3,133.120,

Im Übrigen wird

2.) Der Berufung  
Erhöhung von E

(Schillinginform  
S 43,112.675,00

Die Berufungswerber  
Möglichkeit, an von ih  
Geldeinsatz teilzunehmen  
die im Rahmen ihres i

© Unabhängiger Finanzsenat

### IV.) Verwendete Literatur:

- Glücksverträge – Gewagte Geschäfte, online Lehrbuch Zivilrecht, Kapitel Barta: Zivilrecht – Grundriss und Einführung in das Rechtsdenken (<http://www.gesetze.at>)
- Jörg Bewersdorff, Glück, Logik und Bluff, Mathematik im Spiel – Methoden, Beispiele und Tricks, Vieweg, 2003
- Gerhard Strejcek/Dietmar Hoscher/Markus Eder, Glücksspiel in der EU, 2003
- Dr. Rudolf Sieghart, Die öffentlichen Glücksspiele, Wien, 1999
- Erlacher, Glücksspielgesetz, Stand 1. Oktober 1997, 2. Auflage, Verlag
- Schwarz-Wohlfahrt, Glücksspielgesetz mit wichtigen Spielbedingungen
- Frank Höpfel, Zum Beweissthema der Abhängigkeit eines Spieles vom Zufall, Mathematik 1978
- Christian Bertl, Klaus Schweighofer, Österreichisches Strafrecht, Besondere Strafrecht, 2003
- Üreik Vedat, Das Glücksspielstrafrecht und die Pokercasinos in Österreich, Diplomarbeit an der Universität Innsbruck
- Rita Danyliuk, Einmaleins der Kartenspiele, Humboldt, 2003
- Alexander B. Szanto, Poker, Ekarte und Starpoker, 12. Aufl., Perlen-Rei
- Platinik, Richard F. Scheibb, Meister Poker, 1971
- Sven Pieper, Bärbel Schmidt, Kartenspiele, Reclam Taschenbuch, 1994
- Andy Bellin, Full House, Die Poker-Spieler und ihre Geheimnisse, Europa Verlag, 2002
- Homo ludens, Der spielende Mensch, V, Internationale Beiträge des Institutes für Spielforschung und Spielpädagogik an der Hochschule "Mozarteum" Salzburg, Verlag Emil Katzenbichler, München-Salzburg, 1995
- Michael Monka/Mannfred Tiede/Werner Voß, Gewinnen mit Wahrscheinlichkeit, Statistik für Glücksritter, rororo Taschenbuch, 1999
- Prof. Dr. W.A. Wagenaar, Bluffen beim Pokerspiel, Reichsuniversität in Leiden

### I.) Zur Gebührenpflicht dem Grunde nach

können entscheiden, ob sie Karten zukaufen wollen oder nicht. Die zugekauften Karten dürften offen vor den Spieler hingelegt worden sein. Die Karten des Spieler-Gebers werden dann aufgedeckt und er kann dann 1 Karte kaufen. Wenn der Spieler-Geber mit dem Kauf der Karten fertig ist, werden die Karten der Gegenspieler der Reihe nach aufgedeckt und gegen das Blatt des Spieler-Gebers verglichen. Wer näher an der Punktezahl 9 ist, der Spieler oder der Spieler-Geber, der hat gewonnen. Auf die Kartenkombinationen der anderen Spieler hat das keinen Einfluss. Zum Beispiel Spieler-Geber und Spieler tätigen je einen Einsatz von 50, dann bekommt der, der gewonnen hat, 100. Jeder einzelne Spieler hatte ca. 5 Schilling pro Spielbox zu zahlen.

"Bluff" wie beim Pokerspiel kann es hier durchaus geben, allerdings nur zwischen Spieler und Spielergeber. Das resultiert aus den verdeckten Karten.

Ein Taktieren ist im Hinblick auf die Merkfähigkeit der Kartenkombinationen aller am Spiel beteiligten Spieler möglich – wie beim Black Jack, allerdings hier bezogen auf mehrere Spielrunden.

Nach Auskunft des Geschäftsführers gab es bei Lucky 9 Turnierspiele. Diese Turnierspiele wurden wie beim Poker nach einer eigenen Spielregel durchgeführt.

### 7.1. Spielstrategische Momente

Laut Bewersdorff, Glück, Logik und Bluff, 301 ff, Kapitel: Baccarat: Ziehen bei Fünf?: „Sehen wir uns die Spielchancen zunächst auf rein intuitiven Niveau an: Spieler und Bank haben nur dann Entscheidungen zu treffen, wenn beide Ausgangsblätter einen Wert von 0-7 ergeben. Um ein möglichst günstiges Blatt zu erhalten tun Spieler und Bank gut daran, bei niedrigen Werten eine dritte Karte zu ziehen; dagegen kann bei Werten von 7 oder knapp darunter meist auf eine Karte verzichtet werden. Speziell der Spieler muss allerdings bedenken, dass er mit seiner Entscheidung der Bank einen Hinweis auf die mutmaßliche Qualität seines Ausgangsblattes gibt. Da eine dritte Karte offen ausgeteilt wird, lassen sich diese Hinweise, wenn auch in Grenzen, gegebenenfalls sogar auf das Gesamtblatt übertragen. Insgesamt kann die Bank damit ihre Strategie immer dann erfolgreich anpassen, wenn die Handlungen des Spielers Rückschlüsse auf dessen Ausgangsblatt zulassen.“

Im Hinblick auf die Merkfähigkeit der Kartenkombinationen wurde gleichzeitig wie zu Black Jack eine so genannte Zählsystem mathematisch entwickelt, um sich einen ungefähren, aber ausreichenden Überblick über die Kartenzusammensetzung des Kartenstapels zu verschaffen.

### 8.) Die Grundstruktur von Concord Aces

Von der Bw. wurde das Kartenspiel Concord Aces angeboten. Concord Aces gilt dem Black Jack ähnlich. Laut [http://de.wikipedia.org/wiki/Black\\_Jack](http://de.wikipedia.org/wiki/Black_Jack) ist Black Jack das meistgespielte

© Unabhängiger Finanzsenat

Seite 44

Seite 47

aufgedeckte Karte. Hat der Spieler einen Black Jack (bestimmter Kartenwert) hat er das Spiel gewonnen. Er erhält seinen Einsatz zurück und darüber hinaus eine Gewinnausszahlung in Höhe des Eineinhalbfachen seines Einsatzes: zB 100 Euro Einsatz + 150 Euro Gewinn. Wenn die Bank jedoch ebenfalls mit einer 2. Karte einen Black Jack erreichen könnte, erhält der Spieler zunächst keine Auszahlung.

Die Autoren berechnen die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Punktestände der Bank, mit denen sie ihr Spiel beendet, bzw. des Spielers um das Spiel zu gewinnen bzw. zu verlieren und kommen zu folgendem Schluss: Die Gewinnerwartung ist nur dann positiv, wenn bestimmte Spielregeln gelten und sofern sich der Spieler an bestimmte Spielregeln hält. Freilich ist die Gewinnerwartung unter den erwähnten Spielregeln nur unwesentlich größer als Null – sie liegt ungefähr bei einem Prozent. Black Jack ist das einzige bekannte Glücksspiel mit unter bestimmten Bedingungen positiver Gewinnerwartung für den Spieler. Black Jack ist im Vergleich zum Roulette das für den Spieler günstigere Spiel. Die „ultimative“ Black Jack Strategie hat emotional im Grunde wenig Prickeles zu bieten: Die Bank muss sich wie ein Automat verhalten, und der Spieler sollte sich wie ein Automat verhalten, wenn er nicht verlieren will.“

Laut Bewersdorff, Glück, Logik und Bluff, 81 ff, Kapitel: Black Jack, Ein Märchen aus Las Vegas, haben die Spieler bei Black Jack, anders als beim Roulette einen erheblichen strategischen Einfluss, da sie entscheiden, ob sie noch weitere Karten ziehen wollen oder nicht. In der Literatur zu Black Jack wurde eine Strategie beschrieben, wonach ein Spieler ca. 3,3% bis 10% Gewinnchancen hat. Grundidee war es sich mittels eines so genannten Zählsystems einen ungefähren, aber ausreichenden Überblick über die Kartenzusammensetzung des Kartenstapels zu verschaffen:

„Diese Zählsystemen erfordern allerdings ein Höchstmaß an Übung und Konzentration, denn jede im schnellen Spielverlauf getroffene Fehlentscheidung geht im Mittel zu Lasten des Spielers. Nur wer ständig richtig zählt und seine Strategie entsprechend anpasst, kann seinen geringfügigen Vorteil gegen die Bank halten. Erfolgreiche Card-Counter dürften daher in der Masse der alles andere als optimal spielenden Durchschnittsspieler untergehen. Dass sich der minimale Vorteil zudem nur auf die Erwartung bezieht und durch Pech im Einzelfall zunichte gemacht werden kann, versteht sich von selbst.“

### 9. Die Gutachten im Einzelnen

9.1. April 1994: Bericht „Ein Vergleich der Geschicklichkeit in Spielen mit einem Hasardelement“ (Universitätsprofessor für Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik, Dr. B.B. van der Genugten und Universitätsdozent für Spieltheorie, Dr. P.E.M. Borm, beide Katholische Universität Brabant, Tilburg, Niederlande),

© Unabhängiger Finanzsenat



# The mathematics of games



- Randomness: **Probability theory**  
(founded by Pascal and Fermat 1654 as gambling theory)
- Many combinations: several mathematical tools are known, 1970 J. H. Conway founded a **Combinatorial game theory**
- Hidden information: **Game theory** (John von Neumann: starting 1944 after a first step in 1928).



# From the games of chance ...

- 1222: First correct analysis of a dice game and its chances. Later several wrong computations were given.
- 1654 **Fermat, Pascal** developed a tools for solving problems of gambling, e.g. **de Méré's problem**):
  - Are 24 throws enough to bet with advantage for a double six?



Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnoit fort M. de Méré : car il a très-bon esprit, mais il n'est pas géomètre; c'est, comme vous savez, un grand défaut; et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini, et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et jamais je n'ai pu l'en tirer; si vous pouviez le faire, on le rendroit parfait. Il me disoit donc qu'il avoit trouvé fausseté dans les nombres par cette raison.

Si on entreprend de faire un 6 avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625.

Si on entreprend de faire sonner avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.

Et néanmoins 24 est à 36, qui est le nombre des faces de deux dés, comme 4 à 6, qui est le nombre des faces d'un dé.

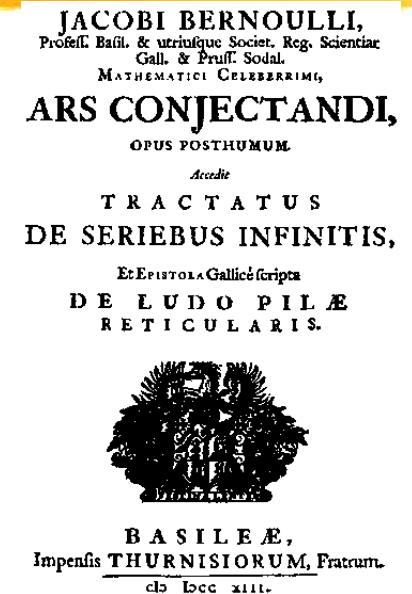
Voilà quel étoit son grand scandale, qui lui faisoit dire hautement que les propositions n'étoient pas constantes, et que l'arithmétique se démentoit. Mais vous en verrez bien aisément la raison, par les principes où vous êtes.





# ... probability

- 1657-, 1703-, 1786- **Huygens, Jacob Bernoulli, Laplace ...**: games of chance are important examples:
  - exactly determined situations
  - Laplace distribution fits, e.g. probability 1/6 for throwing "6" with a die
  - probability: chance to win (as a consequence of symmetry or as a value which can be experimentally measured)
  - Random variable: the amount  $X$  of a win in a game
  - Expected value  $E(X)$ : mean win, i.e. a bet which is fair compared to the chances of win amounts  $X$  of a game
    - $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$  fair bet for two games with win amounts  $X$  and  $Y$ ;
    - $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$  fair bet if you take the win  $X$  of the first game as bet for the second game (results without causal influence)





# Probabilities of Roulette



- Roulette is rather uninteresting in the view of mathematics (if the wheel has no damage)
- There is a law of large numbers, but there is no “law of compensation”, i. e. :

Law of large numbers “guarantees” stable long-term results for the averages of some random events (deviations which are bigger than arbitrarily small limitations have a probability which is arbitrarily small).

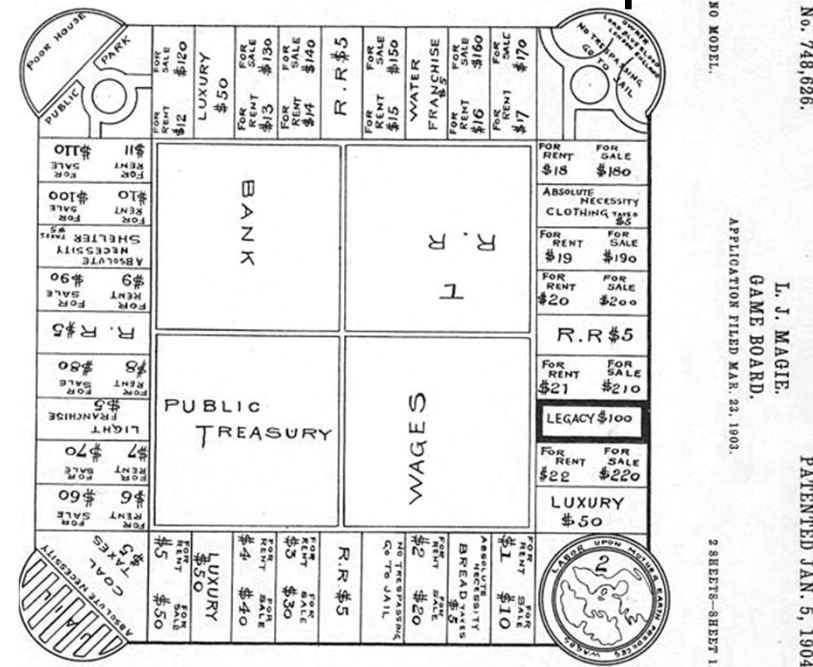
Example, **that no compensation is needed:**

After 10-times “red” a sequence of 6-times „red” und 4-times „black” reduces the relative overweight of “red” but the absolute overweight of “red” is increases.



# Monopoly: The game

- Most sold economic simulation board game: approx. 250 million sold copies.
- Invented 1931 by Charles Darrow.
- But: Landlord's Game from 1904 was a precursor



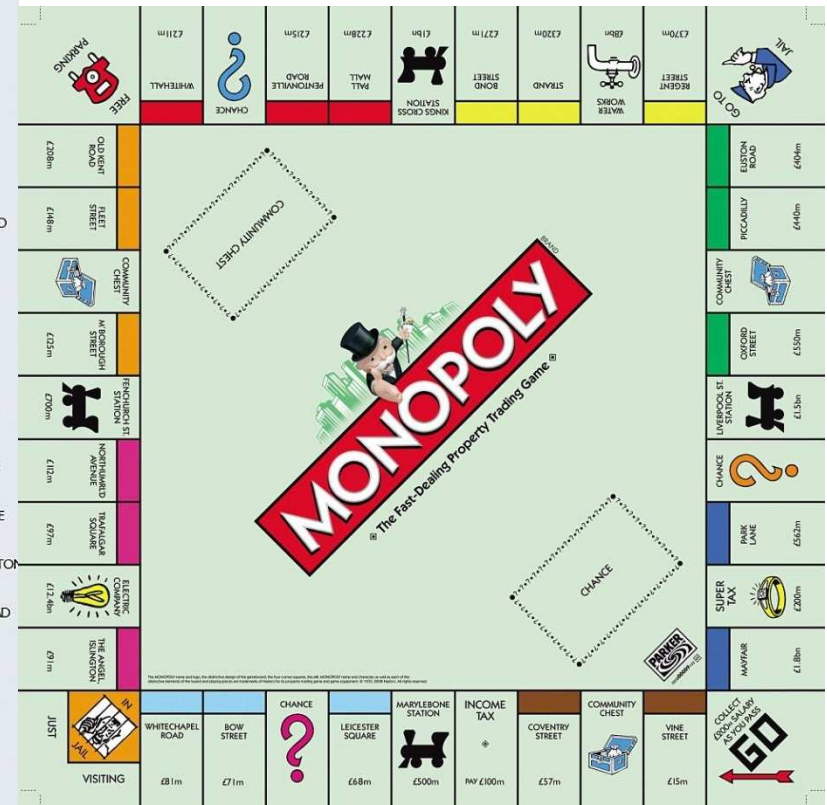
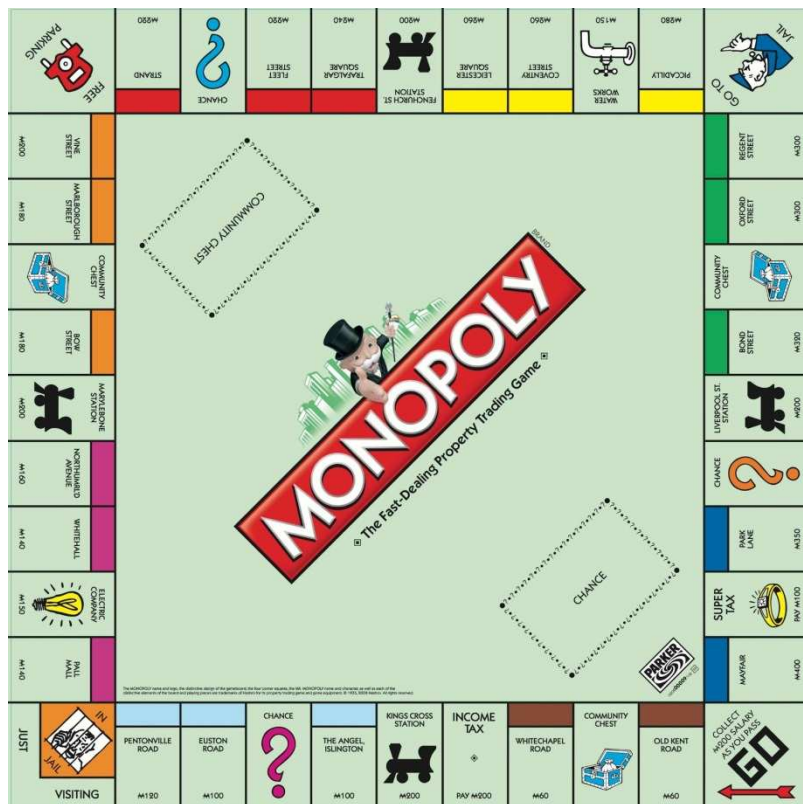
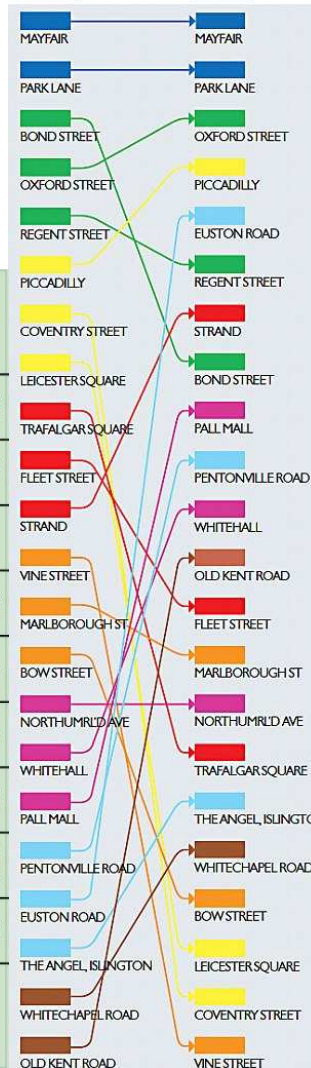


# Monopoly: different UK editions

AFTER 75 YEARS, HOW THE PROPERTIES HAVE CHANGED

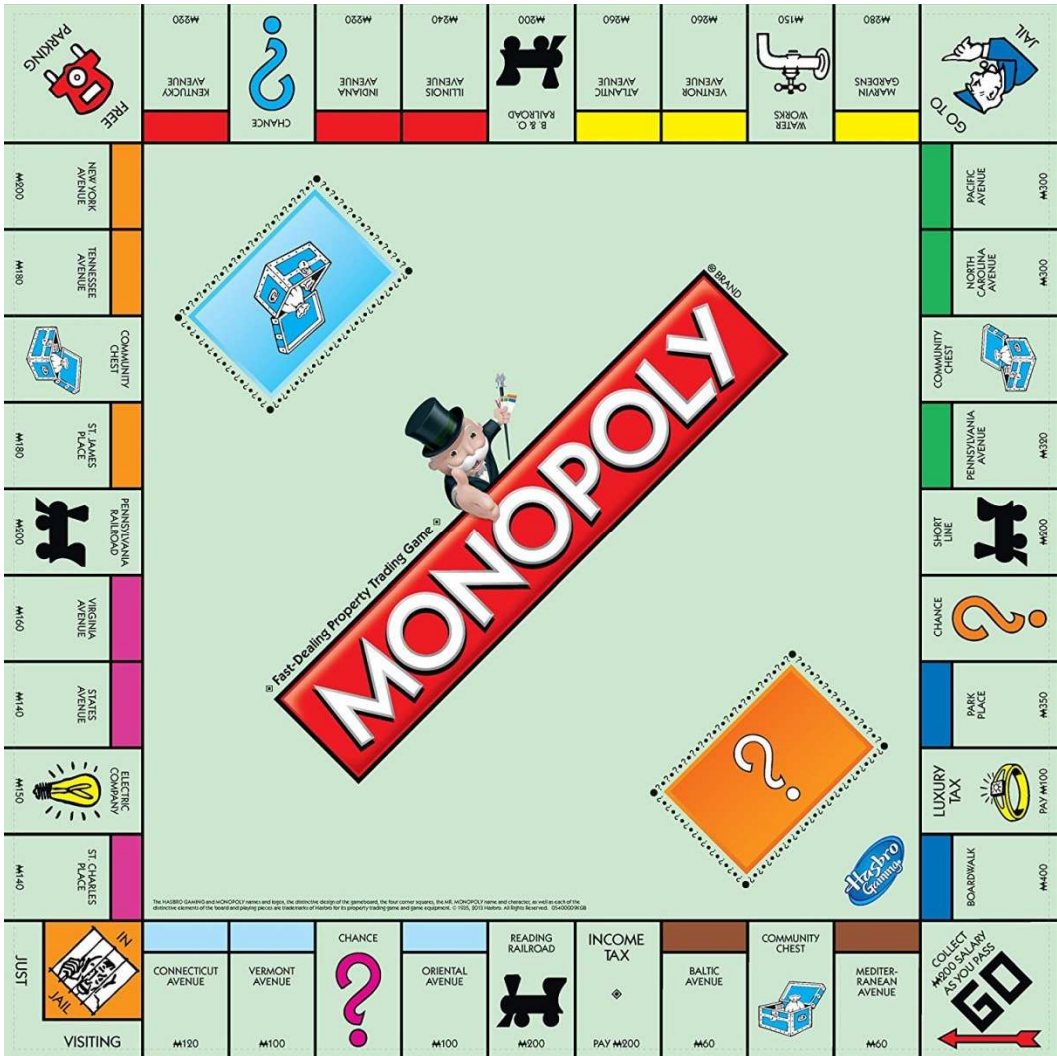
1936

2011





The US edition differs *mathematically* in details (e.g. community chest and chance cards)





# Monopoly: The problem



- **Which properties are the best?**
- Strategy influence: only a little on moving the piece (How long to stay in jail?), but a lot on making investments.
- The jail and “go to jail” break the symmetry between the squares. The probabilities of the squares differs substantially.
- Return on capital (per property):  
rent  $\times$  probability  
= expected value of earned income per turn



# Monopoly as Markov chain

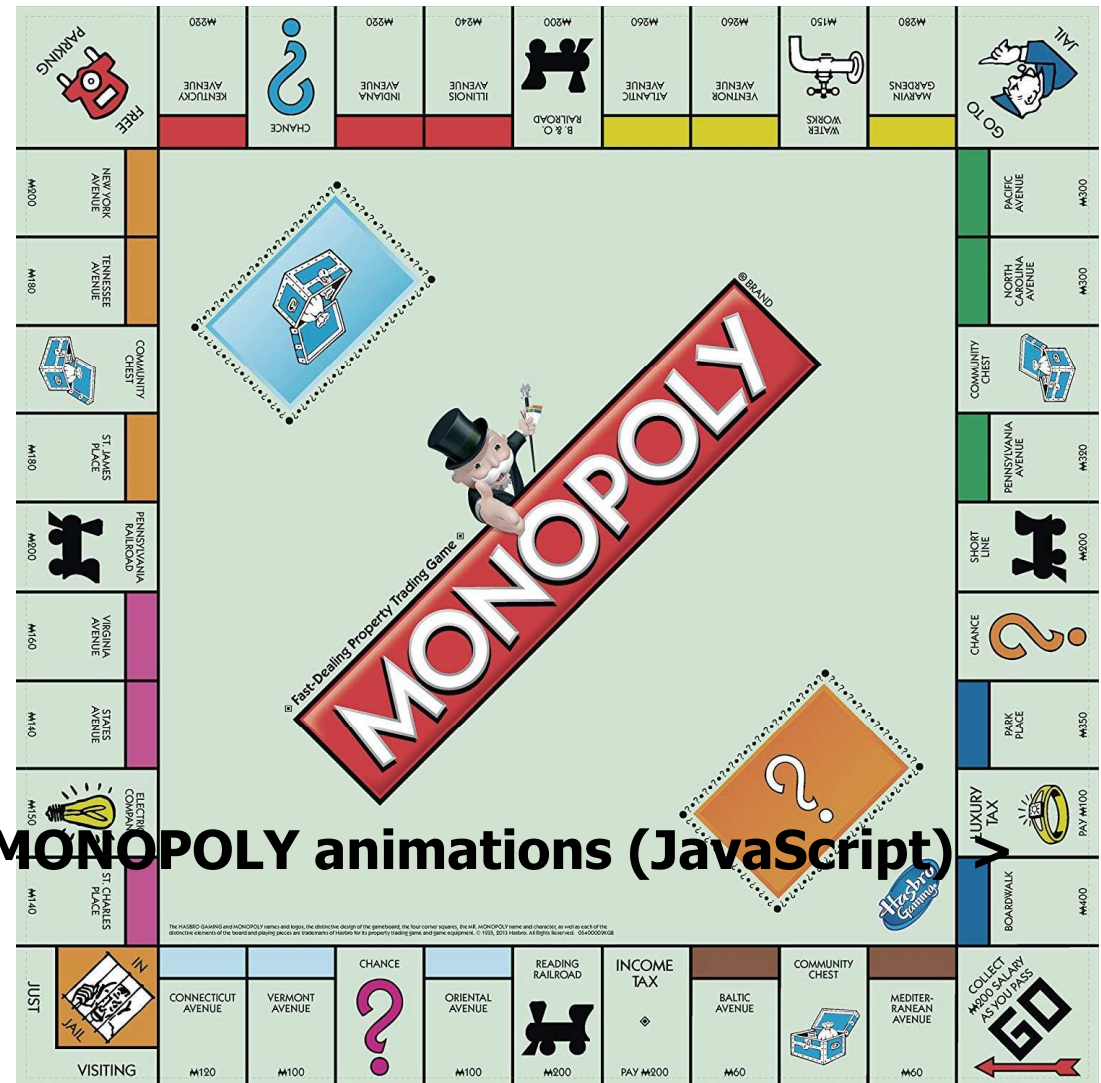


- The Monopoly circuit can be seen as Markov chain with 120 states (40 squares each with 3 sub-states corresponding to thrown doubles).
- Unique equilibrium including 40 probabilities, one for each square. There are 3 ways to get it:
  - Play the game: Roll dice, move a piece and count frequencies.
  - Implement a computer program for doing this.
  - Solve a system of 121 linear equations and 120 variables.



# Monopoly: live

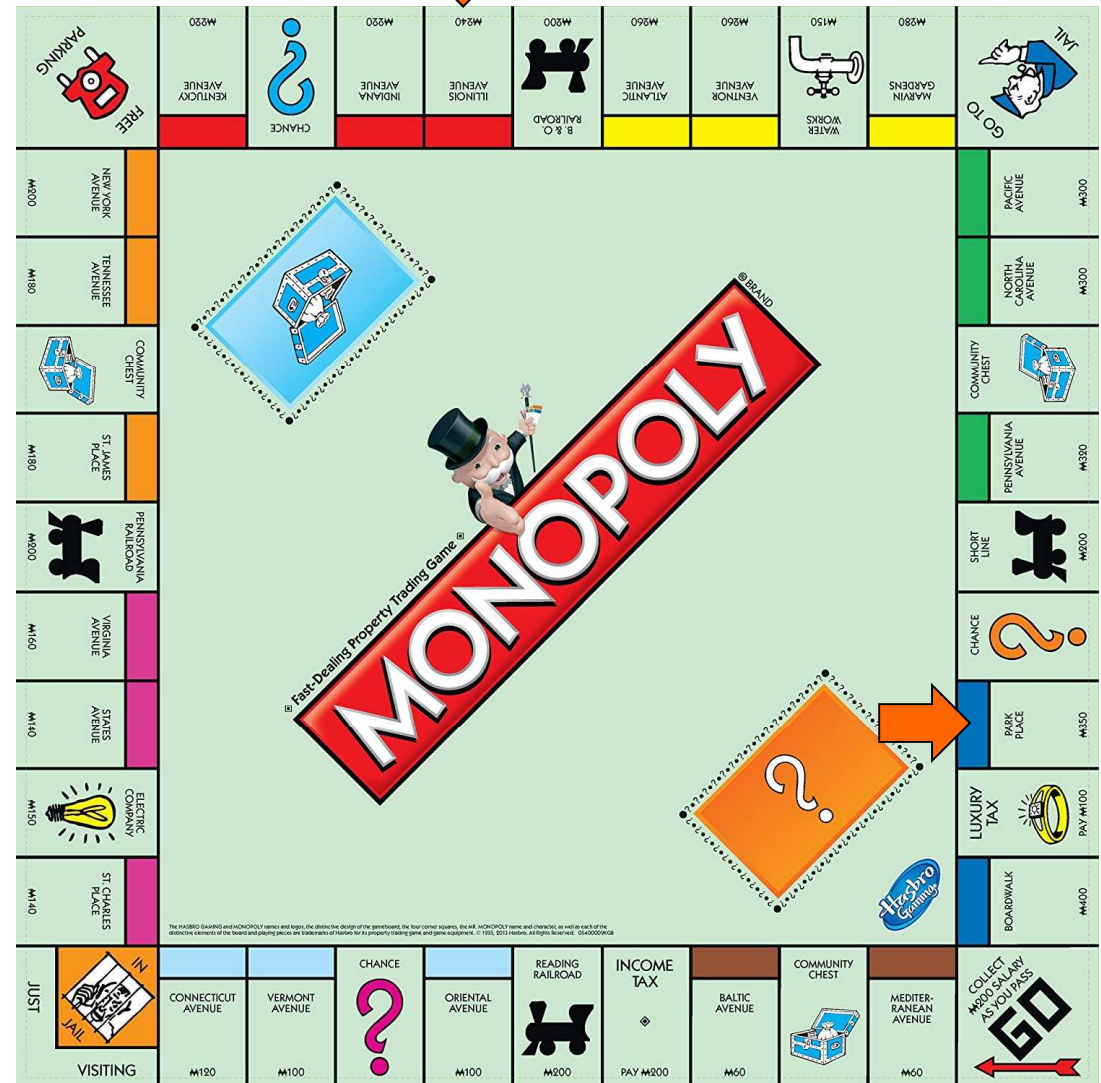
< live demonstration of the MONOPOLY animations (JavaScript) >





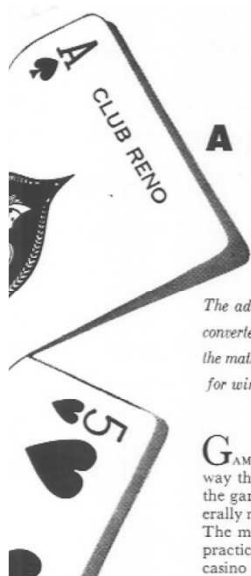
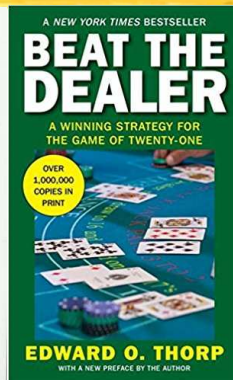
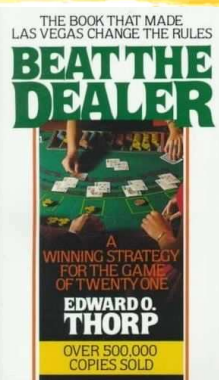
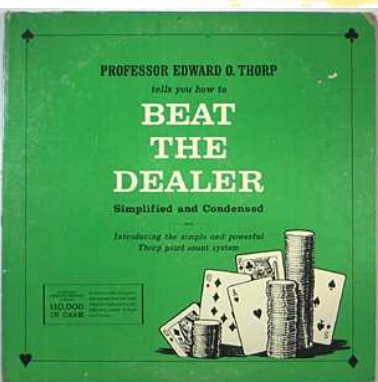
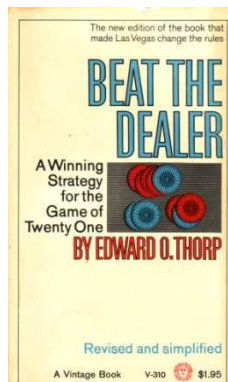
# Monopoly: The result

In the US edition the probability of Illinois Avenue exceeds the probability of Park Lane with 45 %.





# Blackjack



## A PROF BEATS THE GAMBLERS

by Edward O. Thorp

*The advantage in two-handed blackjack, long supposed to lie with the dealer or the house, was converted recently to the profit of the player by EDWARD O. THORP, a young assistant professor in the mathematics department of New Mexico State University. A detailed exposition of his theory for winning at blackjack will be published in book form next fall by Blaisdell.*

**G**AMBLERS have learned through experience that games of chance can be run in such a way that a certain percentage favors one side at the expense of the other side. That is, if the game is played a sufficient number of times, the winnings of the favored side are generally near a certain fixed percentage of the total amount of all bets placed by the opponent. The modern gambling casino takes the side of the gambling games which has proved in practice to be favorable. If necessary, the casino alters the rules of the game so that the casino advantage is sufficient to cover expenses and yield a desirable rate of profit on the

[illegible]



# Blackjack and mathematics



- Casino banking game: A player tries to get a better card total than the bank (dealer
- The chances are depending on the player's strategy, e.g.  $-0.057$  if the player draws like the dealer.
- Baldwin et al. (1956): optimal strategy for drawing (without consideration of the drawn cards) gives expectation values  $-0.006$  to  $-0.008$  depending on variant of rules.
- Thorp 1961: Result on blackjack with a deck of 52 cards. An advantage is possible if the drawn cards are considered.



\_\_\_\_\_

# < live demonstration of the blackjack calculator (JavaScript) >